SYNTHETISK BEVIS

FOR

DEN BEKJENDTE REGEL,

IFÖLGE HVILKEN

ENHVER TRIANGELS AREAL

ER LIG QUADRATRODEN AF ET PRODUCT,

HVORTIL FACTORERNE ERE:

SIDERNES HALVSUMME OG DE TRENDE RESTER,

SOM

ERHOLDES VED AT SUBTRAHERE HVER

AF

TRIANGELENS TRENDE SIDER

FRA

BEMELDTE HALVSUMME.

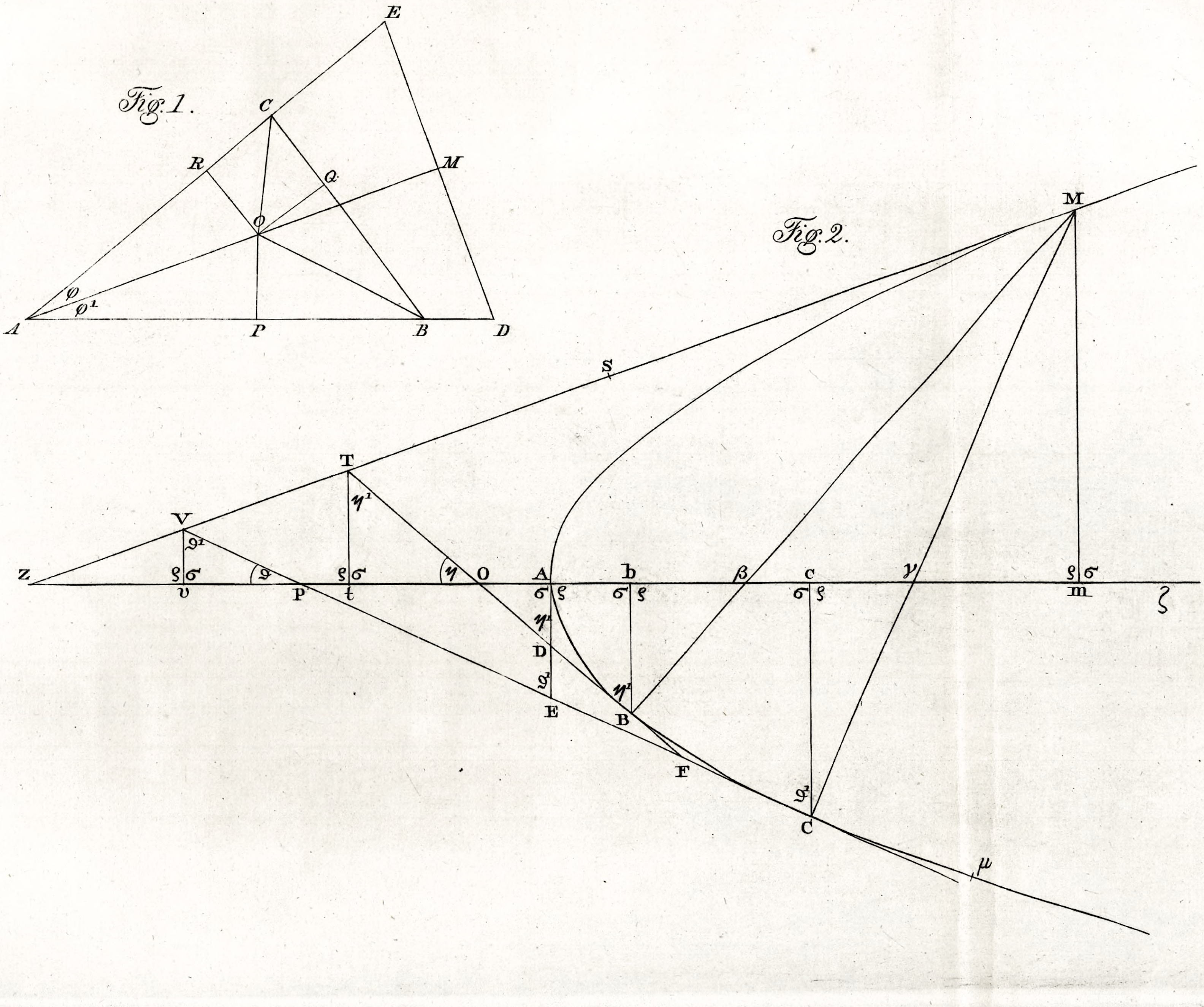
VED

C. F. DEGEN,

DR. PHIL. OG PROF. ORD. I MATHEMATIKEN.

Fig. 1.

Fig. 2.



(Fig. 1.) Ingenlunde vil jeg paaſtaae, at der ikke behöves *Hoved* til at calculere; en ſaadan Paaſtand kunde gives en ikke blot latterlig, men ogſaa for Videnſkaberne ſkadelig Udſtrækning. Kun dette vil jeg ved denne Leilighed bringe i ny Erindring, hvad jeg troer, aldrig kan indſkjærpes for tidt: At man [ved at overlade ſig for meget til det Hang, ſom de nyere Tiders Analyſes ſtore Fuldkommenhed, ſom dens Methoders Omfang, Simplicitet og Elegants ſaa aldeles ſynes at retfærdiggjöre, det Hang, mener jeg, at tilſideſætte den *construerende* Syntheſe og aldeles at overgive ſig til den *calculerende* Analyſe] frivilligen ſpærrer ſig ſelv Veien til mange vigtige Opdagelſer. Gjerne tilſtaaer jeg, at, hvor kjedſomt vidtlöftige Slutninger, hvor forvirrede Tegninger fordunkle Overſkuelſen, den korte og *altid heuristiske* analytiſke Vei er langt behageligere. Men! har dette altid Sted? Jeg mener Nei! og giver mig den Ære ved denne Leilighed at forelægge det K. V. S. dette lidet Bilag til Bevis for min Paaſtand, ſom jeg og haaber, ved flere overtydende Pröver at kunne ſtadfæſte.

Forberedelse.

1) Ved trende rette Linier tvedele man en given Triangels, ABC's, trende Vinkler A, B, C og fælde, fra bemeldte Liniers fælles Skjæringspunkt (den indſkrevne Cirkels Middelpunkt) O, ned paa Siderne de trende lodrette (og ligeſtore) Linier OP, OQ, OR; ſaa er

2) $AP = AR$; $BP = BQ$ og $CQ = CR$; fölgelig er

3) $AD = AE = \Delta$'s halve Omkreds eller Sidernes halve Summe

naar BD tages $= CQ = CR$

og $CE \ldots = BQ = BP$.

4) Den förſte af de i Overſkrivten nævnte Reſter bliver altſaa

$$AD - AB = BD$$

den anden: $AD - AC = AD - AR - RC = AD - AP - BD = PB$

den tredie: $AD - BC = AD - BQ - CQ = AD - BP - BD = AP$

5) Det ſkal altſaa beviſes, at Quadratet af Arealet ABC er lig Productet AD. AP. BB. BD. For denne Sætning giver jeg fölgende lette Bevis:

a) AO forlænget ſkjærer DE lodret i tvende ligeſtore Dele, fordi per conſtr. $AD = AE$ og $\varphi = \varphi'$. Altſaa er

b) $\Delta\ ADM \sim AOP$; fölgelig

c) $AO : OP = AD : DM$ ɔ: $DM = \dfrac{AD.\ OP}{AO}$

og d) $AO : AP = AD : AM$ ɔ: $AM = \dfrac{AD.\ AP}{AO}$.

Men e) $\Delta ADE = AM.\ DM$ og $\Delta ABC = AD.\ OP$.

f) Da nu $\triangle ADE : \triangle ABC = AD.\ AE : AB.\ AC$

$= AD^2 : AB.\ AC$

og desuden $= AM.\ DM : AD.\ OP$

men, ifölge (c) og (d) . . . $AM.\ DM = \dfrac{AD^2.\ AP.\ OP}{AO^2}$, saa er

g) $AD^2 : AB.\ AC = \dfrac{AD^2.\ AP.\ OP}{AO^2} : AD.\ OP$ eller

h) $AO^2 : AB.\ AC = AP : AD$, d. e.

i) $AB.\ AC.\ AP = AO^2.\ AD = AP^2.\ AD + PO^2.\ AD.$

Fremdeles er

k) $AP + PB + BD = AD$, altsaa og

l) $AP + AP.PB + AP.BD = AP.\ AD$, som og

m) $AP^2 + AP.PB + AP.BD + PB.\ BD = AP.\ AD + PB.BD$; d. e.

n) $\overline{AP + PB} \times \overline{AP + BD} = AP.\ AD + PB.\ BD$; eller

o) $AB \times AC = AP.\ AD + PB.\ BD$, fordi

$AP + BD = AR + RC = AC$. Mult. med AP, saa bliver

p) $AB.AC.AP = AP^2.\ AD + AP.\ PB.\ BD.$

Sammenligningen med den ved (i) for AB. AC. AP fundne Værdie viser at

q) $PO^2.\ AD = AP.\ PB.\ BD$, altsaa og

r) $PO^2.\ AD^2 = AD.\ AP.\ PB.\ BD$ eller

s) $PO.\ AD = \triangle ABC = \sqrt{AD.\ AP.\ PB.\ BD}.$

Hv. sk. b.

Anmærkning.

I Sal. Prof. og Major Krebs's *Anfangsgründe der reinen Mathematik* (Kopenh. u. Leipzig 1778. 8.) 2den Deel pag. 155–160. §. 170 findes et andet og ægte, skjöndt noget vidtlöftigt, synthetisk Bevis for samme Sætning. Det derimod, som meddeles i Robertson's *Elements of Navigation* (Lond. 1786. 8.), pag. 75, 76 Theor. 33. er i Grunden det sædvanlige algebraiske, som den vidtlöftigere Betegnelse af de i Figuren forekommende rette Linier ved större latinske Bogstaver ved förste Öiekast giver et synthetisk Udseende *). Forf. tör derfor smigre sig med at det her meddeelte forholdsmæssig meget korte Bevis for hin brugbare Sætning ei vil være Synthesens Elskere, som forstaae at vurdere denne saa temmelig tilsidesatte Methodes Nytte, ukjærkommen. I övrigt skylder jeg vort Selskabs værdige Medlem, Hr. Commandeur og Ridder v. Wleugel min Tak, fordi jeg ved hans Indsigt er bleven gjort opmærksom paa hvad de tvende foranförte Skrifter indeholde, dette Theorem angaaende.

*) Cf. den 2den Udg. af Sal. Etatsraad Bugges *Förste Grunde til den r. eller abstr. Mathem.* 2den Deel §. 12. pag. 232-34.